Compact k-symmetric space の対合とその周辺(部分多様体論と可積分系および幾何解析とのつながり)

東條, 晃次

数理解析研究所講究録
第 1577 巻 2008 年 81-96

Compact k-symmetric space の対合とその周辺

東條 晃次　千葉工業大学

1. はじめに

G を Lie 群, H をその閉部分群とする。G の位数 k の自己同型写像 σ が存在して, $G_o^\sigma \subset H \subset G^\sigma$ (G^σ は σ の固定点集合, G_o^σ はその単位元を含む連結成分) が成り立つとき, $(G/H,\sigma)$ を **k-対称空間**と呼ぶ。

$(G/H,\sigma)$ を G がコンパクト半単純な k-対称空間とし、H を保つ G の対合 τ を考えることにする。$k=2$ のとき ($(G/H,\sigma)$ はコンパクト対称空間) は、τ と σ は G の可換な対合となり、τ を分類することは本質的にアフィン対称空間を分類することになる。これは次のようにしてわかる : $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ をそれぞれ G, H の Lie 環とし、

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m},\quad \mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$$

をそれぞれ σ, τ に関する $\mathfrak{g}$ の標準分解とする。τ と σ が可換であることから、$\mathfrak{h}=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}+\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$ となり、対称対

$$(\mathfrak{g}^*,\mathfrak{h}^*)=(\mathfrak{k}+\sqrt{-1}\mathfrak{p},\ \mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}+\sqrt{-1}(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}))$$

が得られる。逆に、$(\mathfrak{g}^*,\sigma^*)$ を任意の対称対とする。このとき、σ^* に可換な $\mathfrak{g}^*$ の Cartan 対合 τ^* が存在する。$\mathfrak{g}^*=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}^*$ を τ^* に関する Cartan 分解とし、$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}^*$ のコンパクト双対とする。$\mathfrak{h}^*$ を σ^* の $\mathfrak{g}^*$ における固定点集合とすると、$\mathfrak{h}^*=\mathfrak{h}^*\cap\mathfrak{k}+\mathfrak{h}^*\cap\mathfrak{p}^*$ であり、対称対

$$(\mathfrak{g},\mathfrak{h}),\quad \mathfrak{h}:=\mathfrak{h}^*\cap\mathfrak{k}+\sqrt{-1}(\mathfrak{h}^*\cap\mathfrak{p}^*)$$

が得られる。$(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$, $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対応する $\mathfrak{g}$ の対合をそれぞれ τ, σ とすれば、τ^* と σ^* が可換であることから τ と σ も可換であることがわかる ([1])。

また、$k=2$ の場合には、可換な対合 σ, τ を与えることは、コンパクト対称空間の対称部分多様体を分類するためにも重要である ([11] 参照)。

$(G/H,\sigma)$ がコンパクト 3-対称空間であるとき、H を保つ G の対合 τ は

$$\tau\circ\sigma\circ\tau^{-1}=\sigma \text{ または } \sigma^{-1}$$

を満たすことがわかる。$\tau\circ\sigma\circ\tau^{-1}=\sigma$ (すなわち τ と σ は可換) のときは、上に述べた $k=2$ の場合とほぼ同様の方法で、アフアイン 3-対称空間の分類と、このような (σ,τ) の分類が本質的に等価であることがわかる ([15])。また、$\tau\circ\sigma\circ\tau^{-1}=\sigma^{-1}$ を満たす (σ,τ) を分類することは、コンパクト リーマン 3-対称空間 $(G/H,\langle,\rangle,\sigma)$ ($\langle,\rangle$ は G の両側不変なリーマン計量) の標準概複素構造に関する半分次元の全実全測地的部分多様体を分類することと等価であることもわかる ([12], [13])。

上に述べたように、コンパクト k-対称空間 G/H の H を保つ対合 τ を分類することは重要である。ここでは、まず $k=3$ の場合に、H を保つある種の対合と G/H の不変複素構造との関係を明らかにし、不変複素構造に関するコンパクト 3-対称空間の半分次元の全実全測地的部分多様体の分類について述べる。

次に、$(G/H,\sigma)$ を内部型のコンパクト 4-対称空間で、H の中心の次元が 1 以下のものとする。このときも H を保つ G の対合 τ は

$$\tau\circ\sigma\circ\tau^{-1}=\sigma \quad \text{または} \quad \sigma^{-1}$$

を満たすことがわかる。ここでは、H の中心の次元が 0 の場合、および H の中心の次元が 1 で H が G のある torus 部分群の中心化群となっている場合に、H を保つ対合 τ の分類についても述べる。H の次元が 1 で $\tau\circ\sigma\circ\tau^{-1}=\sigma^{-1}$ の場合は $k=3$ の場合 ([12]) と同様に階別 Lie 環を用いて分類できるが、H の中心の次元が 0 で $\tau\circ\sigma\circ\tau^{-1}=\sigma^{-1}$ の場合は $k=3$ の場合 ([13]) とは異なり、階別 Lie 環から得られない対合も出てくる。

2. 有限位数の内部型自己同型写像

$\mathfrak{g}$ をコンパクト単純 Lie 環、$\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{g}$ の極大可換 Lie 部分環とし、$\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_c$ の $\mathfrak{t}_c$ に関するルート系を $\Delta(\mathfrak{g}_c,\mathfrak{t}_c)$ とする。さらに、$\Delta(\mathfrak{g}_c,\mathfrak{t}_c)$ の 1 つの基本ルート系を $\Pi(\mathfrak{g}_c,\mathfrak{t}_c)=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ とする。$K_i\in\mathfrak{t}_c$ $(1\leq i\leq n)$ を次で定める。

$$\alpha_j(K_i)=\delta_{ij}.$$

τ を $\mathfrak{g}$ の位数 m の内部型自己同型写像とする。このとき、次が成り立つ ([3], [6] 参照)。

定理 2.1 $\delta=\sum_{i=1}^n m_i\alpha_i$ を $\Delta(\mathfrak{g}_c,\mathfrak{t}_c)$ の $\Pi(\mathfrak{g}_c,\mathfrak{t}_c)=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ に関する最高ルートとする。このとき、τ は $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の下で

$$\mathrm{Ad}(\exp\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n s_iK_i)$$

に共役である。ここで、$s_0,\ s_1,\cdots,s_n$ は最大公約数が 1 である非負整数で、$m=\sum_{i=0}^n s_im_i$ (ただし、$m_0=1$ とする) をみたすものとする。

特に $m=3,4$ のときは、それぞれ [15], [5] でより詳しく調べられている。

定理 2.2 ([15], [5]) (1) 位数 3 の内部型自己同型写像 τ は $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ で $\mathrm{Ad}(\exp\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}h)$ に共役である。ここで、$h\in\mathfrak{t}_c$ は次のうちのいずれか：

$$K_i,\quad m_i=1,2,3,$$
$$K_j+K_k,\quad m_j=m_k=1.$$

(2) 位数 4 の内部型自己同型写像 τ は $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ で $\mathrm{Ad}(\exp\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}h)$ に共役である。ここで、$h\in\mathfrak{t}_c$ は次のうちのいずれか：

$$K_i,\quad m_i=1,2,3,4,$$
$$K_i+K_j,\quad (m_i,m_j)=(1,1),\ (1,2),\ (2,2),$$
$$K_i+K_j+K_k,\quad m_i=m_j=m_k=1,$$
$$2K_i+K_j,\quad m_i=m_j=1.$$

注意 定理 2.2 の (1) において、$h=K_i,\ m_i=1$ のとき、$(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^\tau)$ はコンパクト対称対となる。また、定理 2.2 の (2) において、$h=K_i,\ m_i=1$ のとき、$(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^\tau)$ はコンパクト対称対となり、

$$h=K_i,\ m_i=2,\qquad h=K_i+K_j,\ m_i=m_j=1,\qquad h=2K_i+K_j,\ m_i=m_j=1$$

のときは、$(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\tau)$ はコンパクト 3-対称対となる。

3. 階別 Lie 環について

この節では階別 Lie 環の分類について、知られていることを簡単に述べる。$\mathfrak{g}^*$ を非コンパクト実単純 Lie 環とする。$\mathfrak{g}^*$ の第 ν 種の *gradation* とは、$\mathfrak{g}^*$ の部分ベクトル空間の族 $\mathfrak{g}^*{}_p$ $(-\nu \leq p \leq \nu)$ であって

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*{}_{-\nu} + \cdots + \mathfrak{g}^*{}_0 + \cdots + \mathfrak{g}^*{}_\nu$$
$$[\mathfrak{g}^*{}_p, \mathfrak{g}^*{}_q] \subset \mathfrak{g}^*{}_{p+q} \qquad (\mathfrak{g}^*{}_\nu \neq \{0\}).$$

を満たすものをいう。このとき、次を満たす元 $Z \in \mathfrak{g}^*$ が一意に存在する (Z を**特性元**という)。

$$\mathrm{ad}(Z)|_{\mathfrak{g}^*{}_p} = p \cdot \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}^*{}_p}.$$

τ を $\mathfrak{g}^*$ の Cartan 対合とし、$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を τ に対する Cartan 分解とする ($\mathfrak{k}$ は Lie 部分環、$\mathfrak{p}$ は部分空間)。$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間とし、$\Pi := \{\lambda_1, \cdots, \lambda_l\}$ を $\mathfrak{a}$ に関する $\mathfrak{g}^*$ の制限ルート系の 1 つの基本系とする。Π の部分集合の族 Π_i $(i = 0, 1, \cdots, n)$ が

$$\Pi = \bigcup_{i=0}^{n} \Pi_i \ \text{(disjoint union)}, \qquad \Pi_1 \neq \emptyset, \ \ \Pi_n \neq \emptyset$$

を満たすとき、$(\Pi_0, \cdots, \Pi_n)$ を Π の **partition** と呼ぶ。

Π の 2 つの partition $(\Pi_0, \cdots, \Pi_n)$, $(\Pi'_0, \cdots, \Pi'_m)$ が同値であるとは、$m = n$ かつ Π の Dynkin 図形の自己同型で Π_i を Π'_i $(0 \leq i \leq n)$ に移すものが存在するときをいう。

定理 3.1 ([8]) $\mathfrak{g}^*$ の gradation の同値類のなす集合と Π の partition の同値類のなす集合の間には 1 対 1 対応が存在する。

定理 3.1 の 1 対 1 対応は次のようにして得られる：$(\Pi_0, \cdots, \Pi_n)$ を Π の partition とする。任意の制限ルート $\lambda = \sum_{i=1}^{l} m_i \lambda_i$ に対して

$$h_\Pi(\lambda) = \sum_{\lambda_i \in \Pi_1} m_i + 2 \sum_{\lambda_j \in \Pi_2} m_j + \cdots + n \sum_{\lambda_k \in \Pi_n} m_k$$

とおく。$Z \in \mathfrak{a}$ を $\lambda(Z) = h_\Pi(\lambda)$ で定める。このとき、定理 3.1 の 1 対 1 対応は $(\Pi_0, \cdots, \Pi_n)$ の同値類に対して Z を characteristic element にもつ $\mathfrak{g}^*$ の gradation の同値類を対応させることにより与えられる。

4. コンパクト 3-対称空間

この節では $(G/H, \sigma)$ をコンパクト 3-対称空間とする。$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ を第 1 節のように G, H の Lie 環とし、$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ を $\mathrm{Ad}(H)$-不変かつ σ-不変分解とする。$\mathfrak{m}$ を G/H の $o = \{H\}$ における接空間 $T_o(G/H)$ と同一視する。$\mathfrak{m}$ の線形変換 J を

$$\sigma|_{\mathfrak{m}} = -\frac{1}{2}\mathrm{Id}_{\mathfrak{m}} + \frac{\sqrt{3}}{2}J$$

によって定義すると、J は $\mathfrak{m}$ の $\mathrm{Ad}(H)$-不変な複素構造となることがわかる。したがって、J から G/H 上に G-不変概複素構造 (同じ記号 J で表す) が誘導される。この J を G/H の**標準概複素構造**と呼ぶ ([2])。

次に、G/H を H の中心の次元が 0 でないものとする (定理 2.2 (1) の $h = K_i$, または $K_j + K_k$, $m_i = 2$, $m_j = m_k = 1$, の場合)。このとき、H は G のあるトーラス部分群の中心化群となることがわかり、したがって G/H は G-不変複素構造を許容することがわかる。このとき次が成り立つ。

命題 4.1 (1) I を G/H の任意の G-不変複素構造とする。$\mathfrak{g}$ の線形変換 φ を $\varphi|_{\mathfrak{h}} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{h}}$, $\varphi|_{\mathfrak{m}} := I \circ J$ によって定めると、φ は $\mathfrak{g}$ の involutive automorphism になる。

(2) 逆に、φ を $\mathfrak{g}$ の involution で、$\varphi|_{\mathfrak{h}} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{h}}$ となるものとする。このとき、$\mathfrak{m}$ の線形変換 $I := -\varphi \circ J$ は G/H の G-不変複素構造を誘導する。

コンパクトリーマン 3-対称空間の J に関する半分次元の全実全測地的部分多様体について述べよう (詳しくは [12] 参照) : $\mathfrak{g}^*$ を非コンパクト実単純 Lie 環でその複素化も単純であるものとし、

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*{}_{-2} + \mathfrak{g}^*{}_{-1} + \mathfrak{g}^*{}_0 + \mathfrak{g}^*{}_1 + \mathfrak{g}^*{}_2$$

を第 2 種の階別 Lie 環、Z をこの階別 Lie 環の特性元とする。さらに、τ を grade-reversing Cartan 対合とし、$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を τ に対応する Cartan 分解とする。このとき、

$$\sigma := \mathrm{Ad}(\exp \frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}Z)$$

は $\mathfrak{g} := \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{g}^*$ のコンパクト双対) の位数 3 の自己同型であることがわかる。G を $\mathfrak{g}$ を Lie 環とするコンパクト単純 Lie 群とし、H を $\mathfrak{h} := \mathfrak{g}^\sigma$ に対応する G の analytic Lie 部分群とする。さらに、K を $\mathfrak{k}$ に対応する G の analytic Lie 部分群とする。$\langle , \rangle$ を G の両側不変計量から誘導された G/H のリーマン計量とするとき、次が成り立つ。

定理 4.2([12]) コンパクトリーマン 3-対称空間 $(G/H, <,>, \sigma)$ において、H の中心の次元は 0 でないとする。このとき、$K \cdot o$ は標準概複素構造 J に関する半分次元の全実全測地的部分多様体となる。逆に、J に関する任意の半分次元の全実全測地的部分多様体はこのようにして得られたものに共役である。

注意 定理 4.2 において、K に対応する G の対合 ($\mathfrak{g}^*$ の Cartan 対合から誘導されたもの) も τ と書けば、$\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = \sigma^{-1}$ が成り立つ。逆に、コンパクトリーマン 3-対称空間 $(G/H, \langle , \rangle, \sigma)$ において、$\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = \sigma^{-1}$ を満たす G の対合 τ に対して、$G^\tau \cdot o$ は J に関する半分次元の全実全測地的部分多様体になる ([13])。

次に、$(G/H, <,>, \sigma)$ を H の中心の次元が 0 でないコンパクトリーマン 3-対称空間とし ($\langle , \rangle$ は G の両側不変計量から誘導されたもの)、I を G/H の任意の G-不変複素構造とする。命題 4.1 を使って [12] と同様の議論をすることにより、次が示せる。

命題 4.3 I に関する $(G/H, \langle , \rangle, \sigma)$ の半分次元の全実全測地的部分多様体は J に関しても半分次元の全実全測地的部分多様体となる (逆は一般には成り立たない)。

5. 半分次元の全実全測地的部分多様体の分類

$(G/H, \langle , \rangle, \sigma)$ を第 4 節と同様に、H の中心の次元が 0 でないコンパクトリーマン 3-対称空間とする。ここでは、G/H の任意の G-不変複素構造 I に関する半分次元の全実全測地的部分多様体の分類について述べる。

$\mathfrak{g}^*$ を非コンパクト実単純 Lie 環とし、$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ をその Cartan 分解、τ を Cartan 対合とする。

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*_{-2} + \mathfrak{g}^*_{-1} + \mathfrak{g}^*_0 + \mathfrak{g}^*_1 + \mathfrak{g}^*_2, \quad \mathfrak{g}^*_1 \neq \{0\}, \ \mathfrak{g}^*_2 \neq \{0\},$$

を τ を grade-reversing Cartan 対合とする第 2 種の gradation とし、$Z \in \mathfrak{p}$ をこの gradation の特性元とする。$\mathfrak{g}^*$ の対合 θ を次で定める：

$$\theta := \mathrm{Ad}(\exp \pi\sqrt{-1}Z) \circ \tau.$$

$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k}_\epsilon + \mathfrak{p}_\epsilon$ を θ に関する固有分解 ($\mathfrak{k}_\epsilon = \mathfrak{g}^{*\theta}$) とし、$\mathfrak{g}^*_{ev} := \mathfrak{g}^*_{-2} + \mathfrak{g}^*_0 + \mathfrak{g}^*_2$ の中心を $\mathfrak{z}$ とおく。このとき、$\mathfrak{z}$ の次元は高々1 であることが知られている。さらに、$\mathfrak{z}$ の次元が 1 で $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{p}$ のとき、対称対 $(\mathfrak{g}^*, \theta)$ は noncompactly causal であり、次を満たす $X^0 \in \mathfrak{p}_\epsilon \cap \mathfrak{p}$ が存在することが知られている (例えば [4])：

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{ad}X^0) = \{-1, 0, 1\}, \quad \mathbb{R}X^0 = \mathfrak{z}.$$

今、$\mathfrak{g} := \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{g}^*$ のコンパクト双対) の位数 3 の自己同型 σ を

$$\sigma := \mathrm{Ad}(\exp \frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}Z)$$

で定め、$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^\sigma$ とおく。$\dim \mathfrak{z} = 0$、または $\dim \mathfrak{z} = 1$ でかつ $(\mathfrak{g}^*, \theta)$ が noncompactly causal でないときは、$\mathfrak{g}$ の対合 φ_0 を

$$\varphi_0 := \mathrm{Ad}(\exp \pi\sqrt{-1}Z)$$

で定め、$\dim \mathfrak{z} = 1$ で $(\mathfrak{g}^*, \theta)$ が noncompactly causal のときは、$\mathfrak{g}$ の対合 $\varphi_0, \varphi_\pm$ を

$$\varphi_0 := \mathrm{Ad}(\exp \pi\sqrt{-1}Z), \quad \varphi_\pm := \mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(Z \pm X^0))$$

によって定める。G, H をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ を Lie 環に持つ Lie 群とし、J を σ から得られる G/H の標準概複素構造とする。

$$I_0 := \varphi_0 \circ J, \quad I_\pm := \varphi_\pm \circ J$$

とすると、$I_0, I_\pm$ は G/H の G-不変複素構造を定め、逆に G/H の任意の G-不変複素構造はこのようにして得られることが示せる。さらに、$N := \exp \mathfrak{k} \cdot o \subset G/H$ は $(G/H, \langle,\rangle, \sigma)$ ($\langle,\rangle$ は G の両側不変リーマン計量) の $I_0, I_\pm$ に関する半分次元の全実全測地的部分多様体となっている。このことは、定理 4.2 と $\varphi_0(\mathfrak{k}) = \varphi_\pm(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}$ であることから証明される。さらに定理 4.3 を用いることにより、逆にこのような部分多様体は、このようにして得られることも示せる。

(Lie 環に関する計算をすることにより)$\mathfrak{z}$ の次元がどのような $\mathfrak{g}^* = \sum_{p=-2}^{2} \mathfrak{g}^*_p$ に対して 0 または 1 となるか、また、$\dim \mathfrak{z} = 1$ の場合、いつ $(\mathfrak{g}^*, \theta)$ は noncompactly causal となるかを調べることができる。その結果は次のようになる。

定理 5.1 コンパクト 3-対称空間 $(G/H, \langle,\rangle, \sigma)$ を G は単純、$\langle,\rangle$ は G の両側不変計量から誘導されたもの、かつ H の中心の次元は 0 でないものとする。このとき、G/H の G-不変複素構造 I、および、I に関する半分次元の全実全測地的部分多様体 $N = \exp \mathfrak{k} \cdot o$ は以下の Table 1, 2 に挙げられたもののいずれかである。

Table 1. $\sigma = \mathrm{Ad}(\exp \frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}K_i)$, $m_i = 2$ の場合.

$\sigma = \mathrm{Ad}\exp\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}Z)$, $I = -\varphi_0 \circ J$. $N = \exp \mathfrak{k} \cdot o$.
$(\mathfrak{g}^*, \theta)$ は partition $\Pi = \Pi_0 \cup \Pi_1$ から得られる階別 Lie 環に対応.

G	H	Z	$(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{k})$	(Π, Π_1)
$SO(2n+1)$ $(n \geq 2)$	$U(i) \times SO(2n-2i+1)$ $(2 \leq i \leq n)$	K_i	$(\mathfrak{so}(l,m), \mathfrak{so}(l) \oplus \mathfrak{so}(m))$ $(i \leq l \leq n,$ $m = 2n+1-l)$	$(\mathfrak{b}_l, \{\lambda_i\})$
$Sp(n)/Z_2$ $(n \geq 3)$	$\{U(i) \times Sp(n-i)\}/Z_2$ $(1 \leq i \leq n-1)$	K_i	$(\mathfrak{sp}(n, R),\ \mathfrak{u}(n))$	$(\mathfrak{c}_n, \{\lambda_i\})$
	$\{U(2k) \times Sp(n-2k)\}/Z_2$ $(2 \leq 2k \leq n-1)$	K_{2k}	$(\mathfrak{sp}(l, n-l),$ $\mathfrak{sp}(l) \oplus \mathfrak{sp}(n-l))$ $(2k \leq 2l \leq n-1)$	$(\mathfrak{bc}_l, \{\lambda_k\})$
			$(\mathfrak{sp}(l,l),\ \mathfrak{sp}(l) \oplus \mathfrak{sp}(l))$ $(n = 2l)$	$(\mathfrak{c}_l, \{\lambda_k\})$
$SO(2n)/Z_2$ $(n \geq 4)$	$\{U(i) \times SO(2n-2i)\}/Z_2$ $(2 \leq i \leq n-2)$	K_i	$(\mathfrak{so}(n,n), \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{so}(n))$	$(\mathfrak{d}_n, \{\lambda_i\})$
			$(\mathfrak{so}(2n-l, l),$ $\mathfrak{so}(2n-l) \oplus \mathfrak{so}(l))$ $(i \leq l \leq n-1)$	$(\mathfrak{b}_l, \{\lambda_i\})$
	$\{U(2k) \times SO(2n-4k)\}/Z_2$ $(1 \leq k < [\frac{n}{2}])$	K_{2k}	$(\mathfrak{so}^*(4l),\ \mathfrak{u}(2l))$ $(n = 2l)$	$(\mathfrak{c}_l, \{\lambda_k\})$
			$(\mathfrak{so}^*(4l+2), \mathfrak{u}(2l+1))$ $(n = 2l+1)$	$(\mathfrak{bc}_l, \{\lambda_k\})$

Table 1-continued. $\sigma = \mathrm{Ad}(\exp \frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}K_i)$, $m_i = 2$ の場合.

$E_6/\boldsymbol{Z}_3$	$\{(SU(6)/\boldsymbol{Z}_3) \times T^1\}/\boldsymbol{Z}_2$	K_2	$(\mathfrak{e}_{6(2)},\ \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{f}_4, \{\lambda_1\})$
			$(\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{so}(10) \oplus \sqrt{-1}\boldsymbol{R})$	$(\mathfrak{bc}_2, \{\lambda_1\})$
			$(\mathfrak{e}_{6(6)},\ \mathfrak{sp}(4))$	$(\mathfrak{e}_6, \{\lambda_2\})$
$E_6/\boldsymbol{Z}_3$	$\{S(U(5) \times U(1)) \times SU(2)\}/\boldsymbol{Z}_2$	K_3	$(\mathfrak{e}_{6(6)},\ \mathfrak{sp}(4))$	$(\mathfrak{e}_6, \{\lambda_3\})$
$E_7/\boldsymbol{Z}_2$	$\{SO(12) \times SO(2)\}/\boldsymbol{Z}_2$	K_1	$(\mathfrak{e}_{7(7)},\ \mathfrak{su}(8))$	$(\mathfrak{e}_7, \{\lambda_1\})$
			$(\mathfrak{e}_{7(-5)},\ \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{f}_4, \{\lambda_1\})$
			$(\mathfrak{e}_{7(-25)},\ \mathfrak{e}_6 \oplus \sqrt{-1}\boldsymbol{R})$	$(\mathfrak{c}_3, \{\lambda_1\})$
$E_7/\boldsymbol{Z}_2$	$S(U(7) \times U(1))/\boldsymbol{Z}_4$	K_2	$(\mathfrak{e}_{7(7)},\ \mathfrak{su}(8))$	$(\mathfrak{e}_7, \{\lambda_2\})$
$E_7/\boldsymbol{Z}_2$	$\{SU(2) \times SO(10) \times SO(2)\}/\boldsymbol{Z}_2$	K_6	$(\mathfrak{e}_{7(7)},\ \mathfrak{su}(8))$	$(\mathfrak{e}_7, \{\lambda_6\})$
			$(\mathfrak{e}_{7(-5)}, \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{f}_4, \{\lambda_4\})$
			$(\mathfrak{e}_{7(-25)},\ \mathfrak{e}_6 \oplus \sqrt{-1}\boldsymbol{R})$	$(\mathfrak{c}_3, \{\lambda_2\})$
E_8	$SO(14) \times SO(2)$	K_1	$(\mathfrak{e}_{8(8)},\ \mathfrak{so}(16))$	$(\mathfrak{e}_8, \{\lambda_1\})$
			$(\mathfrak{e}_{8(-24)},\ \mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{f}_4, \{\lambda_4\})$
E_8	$(E_7 \times T^1)/\boldsymbol{Z}_2$	K_8	$(\mathfrak{e}_{8(8)},\ \mathfrak{so}(16))$	$(\mathfrak{e}_8, \{\lambda_8\})$
			$(\mathfrak{e}_{8(-24)},\ \mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{f}_4, \{\lambda_1\})$
F_4	$\{Sp(3) \times T^1\}/\boldsymbol{Z}_2$	K_1	$(\mathfrak{f}_{4(4)},\ \mathfrak{sp}(3) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{f}_4, \{\lambda_1\})$
F_4	$\{Spin(7) \times T^1\}/\boldsymbol{Z}_2$	K_4	$(\mathfrak{f}_{4(4)},\ \mathfrak{sp}(3) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{f}_4, \{\lambda_4\})$
			$(\mathfrak{f}_{4(-20)},\ \mathfrak{so}(9))$	$(\mathfrak{bc}_1, \{\lambda_1\})$
G_2	$U(2)$	K_2	$(\mathfrak{g}_{2(2)},\ \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{g}_2, \{\lambda_2\})$

Table 2. $\sigma = \mathrm{Ad}(\exp \frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}(K_i + K_j))$, $m_i = m_j = 1$ の場合.

$\sigma = \mathrm{Ad}(\exp(2\pi\sqrt{-1}/3)Z)$, $I = -\varphi \circ J$. $N = \exp \mathfrak{k} \cdot o$.

$(\mathfrak{g}^*, \theta)$ は partition $\Pi = \Pi_0 \cup \Pi_1$ から得られる階別 Lie 環に対応.

G	H	Z	φ	$(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{k})$	(Π, Π_1)
$SU(n)/\boldsymbol{Z}_n$ $(n \geq 3)$	$S(U(i) \times U(j-i) \times U(n-j))/\boldsymbol{Z}_n$ $(1 \leq i \leq [\frac{n-1}{2}],\ i < j \leq n-1)$	$K_i + K_j$	φ_0	$(\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R}),\ \mathfrak{so}(n))$	$(\mathfrak{a}_{n-1}, \{\lambda_i, \lambda_j\})$
			$\varphi_\pm$	$(\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R}),\ \mathfrak{so}(n))$	$(\mathfrak{a}_{n-1}, \{\lambda_i, \lambda_j\})$
		$K_i + K_{n-i}$ $(j = n-i)$	φ_0	$(\mathfrak{su}(l, n-l),\ \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(l) + \mathfrak{u}(n-l)))$ $(i \leq l \leq [\frac{n-1}{2}])$	$(\mathfrak{bc}_l, \{\lambda_i\})$
				$(\mathfrak{su}(l, l), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(l) + \mathfrak{u}(l)))$ $(n = 2l)$	$(\mathfrak{c}_l, \{\lambda_i\})$
	$S(U(2k) \times U(2m-2k) \times U(n-2m))/\boldsymbol{Z}_n$ $(1 \leq k < m \leq l,\ n = 2l+2)$	$K_{2k} + K_{2m}$	φ_0	$(\mathfrak{su}^*(2l+2),\ \mathfrak{sp}(l+1))$	$(\mathfrak{a}_l, \{\lambda_k, \lambda_m\})$
			$\varphi_\pm$	$(\mathfrak{su}^*(2l+2),\ \mathfrak{sp}(l+1))$	$(\mathfrak{a}_l, \{\lambda_k, \lambda_m\})$

Table 2-continued. $\sigma = \mathrm{Ad}(\exp \frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}(K_i + K_j))$, $m_i = m_j = 1$ の場合.

$SO(2n)/\boldsymbol{Z}_2$ $(n \geq 4)$	$\{U(n-1) \times SO(2)\}/\boldsymbol{Z}_2$	$K_{n-1} + K_n$	φ_0	$(\mathfrak{so}(n,n), \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{so}(n))$	$(\mathfrak{d}_n, \{\lambda_{n-1}, \lambda_n\})$
				$(\mathfrak{so}(n+1,n-1),$ $\mathfrak{so}(n+1) \oplus \mathfrak{so}(n-1))$	$(\mathfrak{b}_{n-1}, \{\lambda_{n-1}\})$
				$(\mathfrak{so}^*(4l+2),\ \mathfrak{u}(2l+1))$ $(n = 2l+1)$	$(\mathfrak{bc}_l, \{\lambda_l\})$
			$\varphi_\pm$	$(\mathfrak{so}(n,n), \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{so}(n))$	$(\mathfrak{d}_n, \{\lambda_{n-1}, \lambda_n\})$
$E_6/\boldsymbol{Z}_3$	$\{SO(8) \times SO(2) \times$ $SO(2)\}/\boldsymbol{Z}_2$	$K_1 + K_6$	φ_0	$(\mathfrak{e}_{6(6)},\ \mathfrak{sp}(4))$	$(\mathfrak{e}_6, \{\lambda_1, \lambda_6\})$
				$(\mathfrak{e}_{6(2)},\ \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{f}_4, \{\lambda_4\})$
				$(\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{so}(10) \oplus \sqrt{-1}\boldsymbol{R})$	$(\mathfrak{bc}_2, \{\lambda_2\})$
				$(\mathfrak{e}_{6(-26)},\ \mathfrak{f}_4)$	$(\mathfrak{a}_2, \{\lambda_1, \lambda_2\})$
			$\varphi_\pm$	$(\mathfrak{e}_{6(6)},\ \mathfrak{sp}(4))$	$(\mathfrak{e}_6, \{\lambda_1, \lambda_6\})$
				$(\mathfrak{e}_{6(-26)},\ \mathfrak{f}_4)$	$(\mathfrak{a}_2, \{\lambda_1, \lambda_2\})$

6. コンパクト4-対称空間の場合

G をコンパクト単純 Lie 群、σ を G の位数 4 の内部自己同型写像とする。ここではコンパクト 4-対称空間 $(G/H, \sigma)$ の H を保つ G の対合 τ を分類することを考える。σ は内部型なので、$\mathfrak{g}$ の極大可換 Lie 部分環 $\mathfrak{t}$ で、$\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$ をみたすものが存在する。このような $\mathfrak{t}$ を 1 つ取り固定する。

補題 6.1 σ は定理 2.2 (2) における

$$\mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}h), \quad h = K_i \ (m_i = 3, 4), \quad K_j + K_k \ (m_j = m_k = 2)$$

のいずれかに共役とする。このとき H を保つ G の対合 τ は $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = \sigma$ または σ^{-1} をみたす。

今、$\sigma = \mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}K_i)$ ($m_i = 3$ または 4) と仮定する。$-\alpha_0$ を $\Delta(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{t}_c)$ の 1 つの基本ルート系 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ に関する最高ルートとする。このとき、$\mathfrak{h}_c$ の $\mathfrak{t}_c$ に関するルート系の 1 つの基本ルート系 $\Pi(\mathfrak{h})$ として次が取れる (例えば [3] の Chapter X, Theorem 5.15) :

$$\Pi(\mathfrak{h}) = \begin{cases} \Pi(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{t}_c) \setminus \{\alpha_i\} & (m_i = 3 \text{ のとき}) \\ \Pi(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{t}_c) \cup \{\alpha_0\} \setminus \{\alpha_i\} & (m_i = 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき、次が成り立つ。

補題 6.2 τ を H を保つ G の対合とする。このとき、$\mu \circ \tau \circ \mu^{-1}(\Pi(\mathfrak{h})) = \Pi(\mathfrak{h})$ をみたす $\mu \in \mathrm{Int}(\mathfrak{h})$ が存在する。

補題 6.2 は、コンパクト対称対に関する関する基本的な性質を $(\mathfrak{h}, \tau)$ に適用することで証明される。

次に、階別 Lie 環を使ってこのような対合 τ の例を構成してみよう。$\mathfrak{g}^*$ を非コンパクト実単純 Lie 環とし、第 4 節のように

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*_{-\nu} + \cdots + \mathfrak{g}^*_0 + \cdots + \mathfrak{g}^*_\nu, \ \mathfrak{g}^*_1 \neq \{0\}, \ \mathfrak{g}^*_\nu \neq \{0\}$$

を $\tilde{\tau}$ を grade-reversing Cartan 対合とする第 ν 種の階別 Lie 環とする (ただし、$\nu = 3$ または 4 とする)。Z をその特性元とするとき、

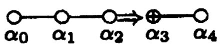
$$\sigma = \mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}Z)$$

は $\mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g}^*$ のコンパクト双対) の位数 4 の内部自己同型写像であり、$\tilde{\tau} \circ \sigma \circ \tilde{\tau}^{-1} = \sigma^{-1}$ をみたすことが、$\tilde{\tau}$ が grade-reversing Cartan 対合 (したがって $\tilde{\tau}(Z) = -Z$) であることからわかる。補題 6.2 より、この $\tilde{\tau}$ を $\mathrm{Int}(\mathfrak{h})$ の元で $\Pi(\mathfrak{h})$ を保つように移すことが出来る。これを τ^{Π} で表すことにする。$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^\sigma$ なので $\tau^{\Pi} \circ \sigma \circ \tau^{\Pi^{-1}} = \sigma^{-1}$ も成立する。

補題 6.2 とこの τ^{Π} を用いて、τ の可能性をほぼ全て挙げることができる。

例 $\mathfrak{g} = \mathfrak{f}_4$, $\sigma = \mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}K_3)$ の場合.

このとき、$\Pi(\mathfrak{h})$ の Dynkin 図形は次のようになる ($\oplus$ は取り除くという意味) :



補題 6.2 より、$\tau|_{\mathfrak{t}}$ の可能性は以下の 2 つとなる :

(i) $\tau|_{\mathfrak{t}} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{t}}$. この場合、$\tau = \mathrm{Ad}(\exp \sqrt{-1}h)$, $\sqrt{-1}h \in \mathfrak{t}$ と書かれる。

(ii) $\tau(\alpha_0)=\alpha_2$, $\tau(\alpha_i)=\alpha_i$, $i=1,4$. この場合、$\tau\circ\sigma\circ\tau^{-1}=\sigma^{-1}$ であることがわかる。

(i) の場合は明らかに $\tau\circ\sigma\circ\tau^{-1}=\sigma$ である。(ii) の場合については、$\mathfrak{g}^*=\mathfrak{f}_{4(4)}$ ($\mathfrak{f}_{4\mathbf{C}}$ の正規実形) の第 4 種の gradation で、その特性元が K_3 であるものを考える。この場合の τ^{Π} を特に τ_4^{Π} と書くと、$\tau_4^{\Pi}\circ\sigma\circ\tau_4^{\Pi^{-1}}=\sigma^{-1}$ であるから τ_4^{Π} も上の (ii) の条件を満たさなければならないことになる。したがって、(ii) の条件を満たす $\mathfrak{g}$ の任意の対合 τ に対して $\tau|_{\mathfrak{t}}=\tau_4^{\Pi}|_{\mathfrak{t}}$ となるので

$$\tau=\tau_4^{\Pi}\circ\mathrm{Ad}(\exp\sqrt{-1}h),\quad \sqrt{-1}h\in\mathfrak{t}$$

と書かれる。

注意 上の例とは異なり、$\tau|_{\mathfrak{t}}\neq\mathrm{Id}_{\mathfrak{t}}$ かつ $\tau\circ\sigma\circ\tau^{-1}=\sigma$ を満たす対合も ($\mathfrak{e}_6$ と $\mathfrak{e}_7$ に 1 つずつ) 存在する。それらについても Dynkin 図形の自己同型 ($\mathfrak{e}_6$ の場合) や、拡大 Dynkin 図形の自己同型 ($\mathfrak{e}_7$ の場合) を用いて τ を調べることができる。

この例 (と注意) のようにして τ の可能性を全て挙げることが出来る。これらを $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ ($\mathfrak{h}$ を保つ $\mathfrak{g}$ の自己同型全体) の共役の下で分類することにより τ の分類が完成する。詳しくは以下のようになる。

定理 6.3 $(G/H,\sigma)$ を、G はコンパクト単純 Lie 群で $\sigma=\mathrm{Ad}(\exp\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}K_i)$, $m_i=3$ または 4 であるコンパクト 4-対称空間とする。τ を H を保つ G の対合とする。このとき、$\mathrm{Aut}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ の下で、τ は以下の Table 3〜6 の中の τ のいずれかと共役である。

注意 以下の表においては、$\sqrt{-1}h\in\mathfrak{t}$ に対して、$\tau_h:=\mathrm{Ad}(\exp\pi\sqrt{-1}h)$ という記号を用いる。また、Table 4 における $\bar{\alpha}_j$ という記号は、$\alpha_j\in\Pi(\mathfrak{g}_c,\mathfrak{t}_c)$ の $\mathfrak{a}$ への制限を表す。

Table 3. $\sigma=\mathrm{Ad}(\exp\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}K_i)$, $m_i=4$, $\tau\circ\sigma\circ\tau^{-1}=\sigma^{-1}$, $\mathfrak{k}=\mathfrak{g}^{\tau}$.

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h},K_i)$	τ	$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}$
$(\mathfrak{e}_8,\mathfrak{su}(8)\oplus\mathfrak{su}(2),K_3)$	τ_1^{Π}	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{so}(8)\oplus\mathfrak{so}(2)$
	$\tau_1^{\Pi}\circ\tau_{K_6}$	$\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{sp}(4)\oplus\mathfrak{so}(2)$
	$\tau_1^{\Pi}\circ\tau_{K_6+(1/2)K_3}$	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{sp}(4)\oplus\mathfrak{so}(2)$
$(\mathfrak{e}_8,\mathfrak{so}(10)\oplus\mathfrak{so}(6),K_6)$	τ_2^{Π}	$\mathfrak{so}(16)$	$(\mathfrak{so}(5)+\mathfrak{so}(5))$ $\oplus(\mathfrak{so}(3)+\mathfrak{so}(3))$
	$\tau_2^{\Pi}\circ\tau_{K_1+K_8}$	$\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{su}(2)$	$(\mathfrak{so}(7)+\mathfrak{so}(3))\oplus\mathfrak{so}(5)$
	$\tau_2^{\Pi}\circ\tau_{K_1+K_3+K_4}$	$\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{so}(9)\oplus(\mathfrak{so}(3)+\mathfrak{so}(3))$
	$\tau_2^{\Pi}\circ\tau_{K_1+K_3+K_8}$	$\mathfrak{so}(16)$	$(\mathfrak{so}(7)+\mathfrak{so}(3))\oplus\mathfrak{so}(5)$
$(\mathfrak{e}_7,\mathfrak{so}(6)\oplus\mathfrak{so}(6)\oplus\mathfrak{su}(2),K_4)$	τ_3^{Π}	$\mathfrak{su}(8)$	$(\mathfrak{so}(3)+\mathfrak{so}(3))$ $\oplus(\mathfrak{so}(3)+\mathfrak{so}(3))\oplus\mathfrak{so}(2)$
	$\tau_3^{\Pi}\circ\tau_{K_1+K_2}$	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{so}(5)$ $\oplus(\mathfrak{so}(3)+\mathfrak{so}(3))\oplus\mathfrak{su}(2)$
	$\tau_3^{\Pi}\circ\tau_{K_1+K_6}$	$\mathfrak{e}_6\oplus\mathbb{R}$	$\mathfrak{so}(5)\oplus\mathfrak{so}(5)\oplus\mathfrak{su}(2)$
	$\tau_3^{\Pi}\circ\tau_{K_1+K_6+(1/2)K_4}$	$\mathfrak{su}(8)$	$\mathfrak{so}(5)\oplus\mathfrak{so}(5)\oplus\mathfrak{su}(2)$
	$\tau_3^{\Pi}\circ\varphi$	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{so}(6)\oplus\mathfrak{so}(2)$
	$\tau_3^{\Pi}\circ\varphi\circ\tau_{(1/2)K_4}$	$\mathfrak{su}(8)$	$\mathfrak{so}(6)\oplus\mathfrak{so}(2)$
$(\mathfrak{f}_4,\mathfrak{so}(6)\oplus\mathfrak{so}(3),K_3)$	τ_4^{Π}	$\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$(\mathfrak{so}(3)+\mathfrak{so}(3))\oplus\mathfrak{so}(2)$
	$\tau_4^{\Pi}\circ\tau_{K_1+K_4}$	$\mathfrak{so}(9)$	$\mathfrak{so}(5)\oplus\mathfrak{so}(3)$
	$\tau_4^{\Pi}\circ\tau_{K_1+K_4+(1/2)K_3}$	$\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{so}(5)\oplus\mathfrak{so}(3)$

τ_1^{Π} : $E_{\alpha_1} \mapsto -E_{\alpha_1}$, $E_{\alpha_2} \mapsto E_{\alpha_0}$, $E_{\alpha_3} \mapsto c_1 E_{\beta_1}$, $E_{\alpha_4} \mapsto E_{\alpha_8}$, $E_{\alpha_5} \mapsto E_{\alpha_7}$, $E_{\alpha_6} \mapsto -E_{\alpha_6}$,
$(\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7)$
τ_2^{Π} : $E_{\alpha_1} \mapsto -E_{\alpha_1}$, $E_{\alpha_2} \mapsto E_{\alpha_5}$, $E_{\alpha_3} \mapsto -E_{\alpha_3}$, $E_{\alpha_4} \mapsto -E_{\alpha_4}$, $E_{\alpha_6} \mapsto c_2 E_{\beta_2}$, $E_{\alpha_7} \mapsto E_{\alpha_0}$,
$E_{\alpha_8} \mapsto -E_{\alpha_8}$, $(\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 3\alpha_5 + 3\alpha_6 + 2\alpha_7 + \alpha_8)$
τ_3^{Π} : $E_{\alpha_1} \mapsto -E_{\alpha_1}$, $E_{\alpha_2} \mapsto -E_{\alpha_2}$, $E_{\alpha_3} \mapsto E_{\alpha_0}$, $E_{\alpha_4} \mapsto c_3 E_{\beta_3}$, $E_{\alpha_5} \mapsto E_{\alpha_7}$, $E_{\alpha_6} \mapsto -E_{\alpha_6}$,
$(\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6)$
τ_4^{Π} : $E_{\alpha_1} \mapsto -E_{\alpha_1}$, $E_{\alpha_2} \mapsto E_{\alpha_0}$, $E_{\alpha_3} \mapsto c_4 E_{\beta_4}$, $E_{\alpha_4} \mapsto -E_{\alpha_4}$, $(\beta_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4)$
where $c_i (i = 1, 2, 3, 4)$ is some complex number with $|c_i| = 1$.

Table 4. $\sigma = \mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}K_i)$, $m_i = 3$, $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = \sigma^{-1}$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^{\tau}$.
(※特にこの場合は、τ は $\mathfrak{g}^*$ の Cartan 対合で、K_i は partition $\Pi = \Pi_0 \cup \Pi_1$ で定義される gradation の特性元 Z に一致.)

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, K_i)$	Π	Π_1	$(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{k})$	$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$
$(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{su}(8) \oplus \mathbb{R}, K_2)$	E_8	$\bar{\alpha}_2$	$(\mathfrak{e}_{8(8)}, \mathfrak{so}(16))$	$\mathfrak{so}(8)$
$(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathbb{R}, K_7)$	E_8	$\bar{\alpha}_7$	$(\mathfrak{e}_{8(8)}, \mathfrak{so}(16))$	$\mathfrak{sp}(4)$
	F_4	$\bar{\alpha}_7$	$(\mathfrak{e}_{8(-24)}, \mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2))$	$\mathfrak{f}_4$
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathbb{R}, K_3)$	E_7	$\bar{\alpha}_3$	$(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{su}(8))$	$\mathfrak{so}(6) \oplus \mathfrak{so}(2)$
	F_4	$\bar{\alpha}_3$	$(\mathfrak{e}_{7(5)}, \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$\mathfrak{sp}(3) \oplus \mathfrak{so}(2)$
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{su}(5) \oplus \mathfrak{su}(3) \oplus \mathbb{R}, K_5)$	E_7	$\bar{\alpha}_5$	$(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{su}(8))$	$\mathfrak{so}(5) \oplus \mathfrak{so}(3)$
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathbb{R}, K_4)$	E_6	$\bar{\alpha}_4$	$(\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{sp}(4))$	$\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(2)$
	F_4	$\bar{\alpha}_4$	$(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$\mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(2)$
$(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathbb{R}, K_2)$	F_4	$\bar{\alpha}_2$	$(\mathfrak{f}_{4(4)}, \mathfrak{sp}(3) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(2)$
$(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{su}(2) \oplus \mathbb{R}, K_1)$	G_2	$\bar{\alpha}_1$	$(\mathfrak{g}_{2(2)}, \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$\mathfrak{so}(2)$

Table 5. $\sigma = \mathrm{Ad}(\exp \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}K_i)$, $m_i = 4$, $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = \sigma$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^{\tau}$.

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, K_i)$	h $(\tau = \tau_h)$	$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$
$(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{su}(8) \oplus \mathfrak{su}(2), K_3)$	K_1	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{su}(8) \oplus \mathfrak{so}(2)$
	K_3	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{su}(8) \oplus \mathfrak{su}(2)$
	K_4	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{sp}(4) \oplus \mathfrak{su}(2)$
	K_6	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(4) + \mathfrak{u}(4)) \oplus \mathfrak{su}(2)$
	$K_3 + K_4$	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{sp}(4) \oplus \mathfrak{su}(2)$
	$K_3 + K_6$	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(4) + \mathfrak{u}(4)) \oplus \mathfrak{su}(2)$
	$K_1 + K_4$	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(6) + \mathfrak{u}(2)) \oplus \mathfrak{so}(2)$
	$K_1 + K_6$	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(6) + \mathfrak{u}(2)) \oplus \mathfrak{so}(2)$
$(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(6), K_6)$	K_1	$\mathfrak{so}(16)$	$(\mathfrak{so}(8) + \mathfrak{so}(2)) \oplus \mathfrak{so}(6)$
	K_3	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	$(\mathfrak{so}(6) + \mathfrak{so}(4)) \oplus \mathfrak{so}(6)$
	K_6	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(6)$
	K_8	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{so}(10) \oplus (\mathfrak{so}(4) + \mathfrak{so}(2))$
	$K_1 + K_8$	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	$(\mathfrak{so}(8) + \mathfrak{so}(2)) \oplus (\mathfrak{so}(4) + \mathfrak{so}(2))$
	$K_2 + K_7$	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{u}(3) \oplus \mathfrak{u}(5)$
	$K_3 + K_8$	$\mathfrak{so}(16)$	$(\mathfrak{so}(6) + \mathfrak{so}(4)) \oplus (\mathfrak{so}(4) + \mathfrak{so}(2))$

	$K_2+K_6+K_7$	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{u}(3)\oplus\mathfrak{u}(5)$
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{so}(6)\oplus\mathfrak{so}(6)\oplus\mathfrak{su}(2), K_4)$	K_1	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{so}(6)\oplus(\mathfrak{so}(4)+\mathfrak{so}(2))\oplus\mathfrak{su}(2)$
	K_2	$\mathfrak{su}(8)$	$\mathfrak{so}(6)\oplus\mathfrak{so}(6)\oplus\mathfrak{so}(2)$
	K_4	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{so}(6)\oplus\mathfrak{so}(6)\oplus\mathfrak{su}(2)$
	K_1+K_2	$\mathfrak{e}_6\oplus\mathbb{R}$	$\mathfrak{so}(6)\oplus(\mathfrak{so}(4)+\mathfrak{so}(2))\oplus\mathfrak{so}(2)$
	K_1+K_6	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$(\mathfrak{so}(4)+\mathfrak{so}(2))$ $\oplus(\mathfrak{so}(4)+\mathfrak{so}(2))\oplus\mathfrak{su}(2)$
	K_3+K_7	$\mathfrak{su}(8)$	$\mathfrak{u}(3)\oplus\mathfrak{u}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)$
	$K_1+K_2+K_6$	$\mathfrak{su}(8)$	$(\mathfrak{so}(4)+\mathfrak{so}(2))$ $\oplus(\mathfrak{so}(4)+\mathfrak{so}(2))\oplus\mathfrak{so}(2)$
	$K_2+K_3+K_7$	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{u}(3)\oplus\mathfrak{u}(3)\oplus\mathfrak{so}(2)$
	$K_3+K_4+K_7$	$\mathfrak{e}_6\oplus\mathbb{R}$	$\mathfrak{u}(3)\oplus\mathfrak{u}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)$
$(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{so}(6)\oplus\mathfrak{so}(3), K_3)$	K_1	$\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$(\mathfrak{so}(4)+\mathfrak{so}(2))\oplus\mathfrak{so}(3)$
	K_3	$\mathfrak{so}(9)$	$\mathfrak{so}(6)\oplus\mathfrak{so}(3)$
	K_4	$\mathfrak{so}(9)$	$\mathfrak{so}(6)\oplus\mathfrak{so}(2)$
	K_1+K_4	$\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{so}(6)\oplus\mathfrak{so}(2)$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, K_i)$	τ	$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}$
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{so}(6)\oplus\mathfrak{so}(6)\oplus\mathfrak{su}(2), K_4)$	φ	$\mathfrak{e}_6\oplus\mathbb{R}$	$\mathfrak{so}(16)\oplus\mathfrak{sp}(1)$
	$\varphi\circ\tau_{K_2}$	$\mathfrak{su}(8)$	$\mathfrak{so}(16)\oplus\mathfrak{so}(2)$
	$\varphi\circ\tau_{K_4}$	$\mathfrak{su}(8)$	$\mathfrak{so}(16)\oplus\mathfrak{sp}(1)$

$\varphi\ :\ E_{\alpha_1}\mapsto E_{\alpha_6},\ E_{\alpha_2}\mapsto E_{\alpha_2},\ E_{\alpha_3}\mapsto E_{\alpha_5},\ E_{\alpha_4}\mapsto E_{\alpha_4},\ E_{\alpha_7}\mapsto E_{\alpha_0}$

Table 6. $\sigma = \mathrm{Ad}(\exp\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}K_i)$, $m_i = 3$, $\tau\circ\sigma\circ\tau^{-1} = \sigma$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^{\tau}$.

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, K_i)$	h $(\tau = \tau_h)$	$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}$
$(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{su}(8)\oplus\mathbb{R}, K_2)$	K_1	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(7)+\mathfrak{u}(1))\oplus\mathbb{R}$
	K_2	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{su}(8)\oplus\mathbb{R}$
	K_3	$\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(6)+\mathfrak{u}(2))\oplus\mathbb{R}$
	K_4	$\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(5)+\mathfrak{u}(3))\oplus\mathbb{R}$
	K_5	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(4)+\mathfrak{u}(4))\oplus\mathbb{R}$
	K_8	$\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(7)+\mathfrak{u}(1))\oplus\mathbb{R}$
	K_2+K_3	$\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(6)+\mathfrak{u}(2))\oplus\mathbb{R}$
	K_2+K_4	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(5)+\mathfrak{u}(3))\oplus\mathbb{R}$
$(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{e}_6\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}, K_7)$	K_1	$\mathfrak{so}(16)$	$(\mathfrak{so}(10)+\mathbb{R})\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_2	$\mathfrak{so}(16)$	$(\mathfrak{su}(6)+\mathfrak{su}(2))\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_7	$\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{e}_6\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_8	$\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{e}_6\oplus\mathfrak{so}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_1+K_7	$\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{su}(2)$	$(\mathfrak{so}(10)+\mathbb{R})\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_1+K_8	$\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{su}(2)$	$(\mathfrak{so}(10)+\mathbb{R})\oplus\mathfrak{so}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_2+K_7	$\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{su}(2)$	$(\mathfrak{su}(6)+\mathfrak{su}(2))\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_2+K_8	$\mathfrak{so}(16)$	$(\mathfrak{su}(6)+\mathfrak{su}(2))\oplus\mathfrak{so}(2)\oplus\mathbb{R}$
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}, K_3)$	K_1	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{so}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_2	$\mathfrak{su}(8)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(5)+\mathfrak{u}(1))\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$

	K_3	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_4	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(4)+\mathfrak{u}(2))\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_5	$\mathfrak{su}(8)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(3)+\mathfrak{u}(3))\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_7	$\mathfrak{e}_6\oplus\mathbb{R}$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(5)+\mathfrak{u}(1))\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_1+K_2	$\mathfrak{e}_6\oplus\mathbb{R}$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(5)+\mathfrak{u}(1))\oplus\mathfrak{so}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_1+K_4	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(4)+\mathfrak{u}(2))\oplus\mathfrak{so}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_1+K_5	$\mathfrak{su}(8)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(3)+\mathfrak{u}(3))\oplus\mathfrak{so}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_3+K_4	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(4)+\mathfrak{u}(2))\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_3+K_5	$\mathfrak{e}_6\oplus\mathbb{R}$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(3)+\mathfrak{u}(3))\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$
$(\mathfrak{e}_7,\mathfrak{su}(5)\oplus\mathfrak{su}(3)\oplus\mathbb{R},K_5)$	K_1	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(4)+\mathfrak{u}(1))\oplus\mathfrak{su}(3)\oplus\mathbb{R}$
	K_3	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(3)+\mathfrak{u}(2))\oplus\mathfrak{su}(3)\oplus\mathbb{R}$
	K_5	$\mathfrak{su}(8)$	$\mathfrak{su}(5)\oplus\mathfrak{su}(3)\oplus\mathbb{R}$
	K_6	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{su}(5)\oplus\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2)+\mathfrak{u}(1))\oplus\mathbb{R}$
	K_7	$\mathfrak{e}_6\oplus\mathbb{R}$	$\mathfrak{su}(5)\oplus\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2)+\mathfrak{u}(1))\oplus\mathbb{R}$
	K_1+K_5	$\mathfrak{su}(8)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(4)+\mathfrak{u}(1))\oplus\mathfrak{su}(3)\oplus\mathbb{R}$
	K_1+K_6	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(4)+\mathfrak{u}(1))$ $\oplus\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2)+\mathfrak{u}(1))\oplus\mathbb{R}$
	K_1+K_7	$\mathfrak{e}_6\oplus\mathbb{R}$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(4)+\mathfrak{u}(1))$ $\oplus\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2)+\mathfrak{u}(1))\oplus\mathbb{R}$
	K_3+K_5	$\mathfrak{e}_6\oplus\mathbb{R}$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(3)+\mathfrak{u}(2))\oplus\mathfrak{su}(3)\oplus\mathbb{R}$
	K_3+K_6	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(3)+\mathfrak{u}(2))$ $\oplus\mathfrak{su}(2)+\mathfrak{u}(1))\oplus\mathbb{R}$
	K_3+K_7	$\mathfrak{su}(8)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(3)+\mathfrak{u}(2))$ $\oplus\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2)+\mathfrak{u}(1))\oplus\mathbb{R}$
$(\mathfrak{e}_6,\mathfrak{su}(3)\oplus\mathfrak{su}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R},K_4)$	K_1	$\mathfrak{so}(10)\oplus\mathbb{R}$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2)+\mathfrak{u}(1))$ $\oplus\mathfrak{su}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_4	$\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{su}(3)\oplus\mathfrak{su}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_5	$\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2)+\mathfrak{u}(1))$ $\oplus\mathfrak{su}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_1+K_2	$\mathfrak{so}(10)\oplus\mathbb{R}$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2)+\mathfrak{u}(1))$ $\oplus\mathfrak{su}(3)\oplus\mathfrak{so}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_1+K_5	$\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2)+\mathfrak{u}(1))$ $\oplus\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2)+\mathfrak{u}(1))\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_2+K_4	$\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{su}(3)\oplus\mathfrak{su}(3)\oplus\mathfrak{so}(2)\oplus\mathbb{R}$
	$K_1+K_2+K_5$	$\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2)+\mathfrak{u}(1))$ $\oplus\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2)+\mathfrak{u}(1))\oplus\mathfrak{so}(2)\oplus\mathbb{R}$
	$K_1+K_4+K_5$	$\mathfrak{so}(10)\oplus\mathbb{R}$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2)+\mathfrak{u}(1))$ $\oplus\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2)+\mathfrak{u}(1))\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$
$(\mathfrak{f}_4,\mathfrak{su}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R},K_2)$	K_1	$\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{su}(3)\oplus\mathfrak{so}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_2	$\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{su}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_4	$\mathfrak{so}(9)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2)+\mathfrak{u}(1))\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_1+K_3	$\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2)+\mathfrak{u}(1))\oplus\mathfrak{so}(2)\oplus\mathbb{R}$
	K_2+K_4	$\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2)+\mathfrak{u}(1))\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$

$(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{su}(2) \oplus \mathbb{R}, K_1)$	K_1 K_2	$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathbb{R}$ $\mathfrak{so}(2) \oplus \mathbb{R}$
$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, K_i)$	τ	$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathbb{R}, K_4)$	ψ $\psi \circ \tau_{K_2}$ $\psi \circ \tau_{K_4}$	$\mathfrak{f}_4$ $\mathfrak{sp}(4)$ $\mathfrak{sp}(4)$	$\mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{sp}(1) \oplus \mathbb{R}$ $\mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{so}(2) \oplus \mathbb{R}$ $\mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{sp}(1) \oplus \mathbb{R}$

$\psi\ :\ E_{\alpha_1} \mapsto E_{\alpha_6},\ E_{\alpha_2} \mapsto E_{\alpha_2},\ E_{\alpha_3} \mapsto E_{\alpha_5},\ E_{\alpha_4} \mapsto E_{\alpha_4}$

参考文献

[1] M. Berger, *Les espaces symétriques non compacts*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **74** (1957) 85-117.

[2] A. Gray, *Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3,* J. Differential Geom., **7** (1972), 343–369

[3] S. Helgason, Differential Geometry, Lie groups, and Symmetric Spaces, Academic Press, New York London, 1978.

[4] J. Hilgert and G. Ólafsson, Causal Symmetric Spaces: Geometry and Harmonic Analysis, Academic Press, San Diego, 1997.

[5] J. A. Jiménez, *Riemannian 4-symmetric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **306** (1988), 715-734.

[6] V. G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, Third edition, Cambrige Univ. Press, 1990.

[7] S. Kaneyuki, Signatures of roots and a new characterization of causal symmetric spaces, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **20**, 213–230, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996.

[8] S. Kaneyuki and H. Asano, Graded Lie algebras and generalized Jordan triple systems, Nagoya Math. J. **112** (1988), 81–115.

[9] H. Kurihara and K. Tojo, *Involutions of compact Riemannian 4-symmetric spaces,* to appear in Osaka J. Math.

[10] S. Murakami, *Sur la classification des algèbres de Lie réelles et simples,* Osaka J. Math., **2** (1965), 291-307.

[11] 塚田-内藤, 対称空間の対称部分多様体の分類, 数学 **55(3)** (2003) 42–57, 日本数学会編集, 岩波書店

[12] K. Tojo, *Totally real totally geodesic submanifolds of compact 3-symmetric spaces,* Tôhoku Math. J., **53** (2001) 131–143

[13] K. Tojo, *Classification of totally real totally geodesic submanifolds of compact 3-symmetric spaces,* J. Math. Soc. Japan, **58** (2006), 17-53

[14] K.Tojo, *Affine symmetric spaces and complex structures, totally real and totally geodesic submanifolds of compact 3-symmetric spaces,* preprint.

[15] J. A. Wolf and A. Gray, *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms I,II,* J. Differential Geom., **2** (1968), 77-114, 115-159.